Сопряженные уравнения. Алгоритмы возмущений

Лектор: д.ф.-м.н., профессор
Темирбеков Н.М.

Рассмотрим теперь сопряженную невозмущенную задачу
$A^* u_* = p$, (10.1)

соответствующую основной задаче (9.1). Здесь A^* - оператор, сопряженный к A, с областью определения $D(A^*) \subset H, p \in H.$ Задачу (10.1) будем считать разрешимой.

Так же как и в случае основной задачи, введем возмущенную сопряженную задачу

$A_\varepsilon^* u_\varepsilon^* = p_\varepsilon$, (10.2)

причем δA^* - заданный оператор, действующий *в H, с* областью определения $D(A^*), \delta p \in H.$ Здесь мы ради общности считаем, что возмущается не только оператор *A*,* но и функция измерения *p.* Обычно измерение физической величины (прибора) не меняется, и потому в большинстве практически интересных случаев $\delta p = 0$, т.е. $p_\varepsilon = p.$ Но этого может и не быть.

$u_\varepsilon^* = u_0^* + \varepsilon u_1^* + \varepsilon^2 u_2^* + \cdots$ (10.4)

$A^* u_0^* = p,$

$$A^* u_1^* = \delta p - \delta A^* u_0^*$$

$A^* u_i^* = -\delta A^* u_{i-1}^*, i = 2,3, \ldots$ (10.5)

Если найти лишь функции $\{u_i^*\}_{i=1}^N$, то функцию

$u_\varepsilon^{*(N)} = u_0^* + \varepsilon u_1^* + \cdots + \varepsilon^N u_N^*$ (10.6)

$A_\varepsilon^* u_\varepsilon^* = p_\varepsilon$ (10.7)

Где

$A_\varepsilon^* = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i A_i^*, A_0^* = A^*,$ (10.8)

$$p_\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i A_i^*, \qquad p_0 = p,$$

$$u_\varepsilon^* = u_0^* + \varepsilon u_1^* + \varepsilon^2 u_2^* + \cdots$$

Тогда обычным приемом члены приходим к системе уравнений

$$A^* u_0^* = p,$$

$A^* u_1^* = p_1 - A_1{}^* u_0^*,$

$A^* u_2^* = p_2 - A_1{}^* u_1^* - A_2^* u_0^*,$ (10.9)

....

$A^* u_n^* = p_n - \sum_{k=1}^{n} A_k^* \, u_{n-k}^* .$

Последовательно решая эти уравнения, можно найти $u_\varepsilon^{*(N)}$ по формуле (10.6).

В заключение приведем пример. Пусть в пространстве $H = L_2(0,1)$ действует оператор A, определенный дифференциальным выражением

$Au = -\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx},$

С областью определения $D(A)$, введенной в Л.1. Тогда задача (9.1) имеет вид

$-\frac{d^2u}{dx^2} = f,\ \ x \in (0,1), u(0) = u(1) = 0.$ (10.10)

$$-\frac{d^2u^*}{dx^2}-\frac{du^*}{dx}=p, x\in(0,1), u^*(0)=u^*(1)=0. \quad (10.11)$$

$$-\frac{d^2u_\varepsilon^*}{dx^2}-\left(1+\varepsilon g(x)\right)\frac{du_\varepsilon^*}{dx}=p, u_\varepsilon^*(0)=u_\varepsilon^*(1)=0. \quad (10.12)$$

Здесь $p_\varepsilon=p, \delta A^*u_\varepsilon^*=-\frac{g(x)(du^*)}{dx}, g(x)$ – достаточно гладкая функция.

$$-\frac{d^2u_0^*}{dx^2}-\frac{du_0^*}{dx}=p, \qquad u_0^*(0)=u_0^*(1)=0,$$

$$-\frac{d^2u_1^*}{dx^2}-\frac{du_1^*}{dx}=g(x)\frac{du_0^*}{dx}, u_1^*(0)=u_1^*(1)=0, \quad (10.13)$$

$$-\frac{d^2u_i^*}{dx^2}-\frac{du_i^*}{dx}=g(x)\frac{du_{i-1}^*}{dx}, u_i^*(0)=u_i^*(1)=0,$$

$$i=2,3,\dots$$

$$u_\varepsilon^{*(1)}=u_0^*+\varepsilon u_1^*.$$

$$A\varphi=\lambda\varphi \qquad (10.14)$$

$(A\varphi, \varphi^*) = (\varphi, A^*\varphi^*)$. (10.15)

$A^*\varphi^* = \lambda\varphi^*$ (10.16)

$A_\varepsilon\varphi_\varepsilon = \lambda_\varepsilon\varphi_\varepsilon$, (10.17)

$A\varphi = \lambda\varphi + f$ (10.18)

$A^*\varphi^* = \lambda\varphi^*$ (10.19)

$(f, \varphi^*) = 0$. (10.20)

$A_\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i A^{(i)}$ (10.21)

$$\lambda_\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \lambda^{(i)}, \lambda^{(0)} = \lambda,$$

$\varphi_\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \varphi^{(i)}, \ \varphi^{(0)} = \varphi$, (10.22)

сходящихся в некоторой области $\varepsilon = 0$.

степенях ε, получаем систему

$$\left(A-\lambda^{(0)}E\right)\varphi^{(0)}=0, \lambda^{(0)}=\lambda, \qquad \varphi^{(0)}=\varphi,$$

$$\left(A-\lambda^{(0)}E\right)\varphi^{(1)}=\lambda^{(1)}\varphi^{(0)}-A^{(1)}\,\varphi^{(0)},$$

.... (10.23)

$$\left(A-\lambda^{(0)}E\right)\varphi^{(n)}=\sum_{i=1}^{n}\lambda^{(i)}\,\varphi^{(n-i)}-\sum_{i=1}^{n}A^{(i)}\;\varphi^{(n-i)},$$

....

где E - тождественный оператор, т.е. $E\varphi=\varphi$. Систему уравнений (10.23) перепишем в виде

$$\left(A - \lambda^{(0)}E\right)\varphi^{(0)} = 0,$$
$$\left(A - \lambda^{(0)}E\right)\varphi^{(1)} = f_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (10.24)$$
$$\left(A - \lambda^{(0)}E\right)\varphi^{(n)} = f_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Здесь f_n (n = 1, 2,. . .) определяется формулами

$$f_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda^{(i)}\varphi^{(n-i)} - \sum_{i=1}^{n} A^{(i)}\varphi^{(n-i)}. \qquad (10.25)$$

$$\lambda^{(1)}\left(\varphi^{(0)}, \varphi^*\right) - \left(A^{(1)}\varphi^{(0)}, \varphi^*\right) = 0,$$
$$\lambda^{(2)}\left(\varphi^{(0)}, \varphi^*\right) + \lambda^{(1)}\left(\varphi^{(1)}, \varphi^*\right) - \left(A^{(2)}\varphi^{(0)} + A^{(1)}\varphi^{(1)}, \varphi^*\right)$$
$$= 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (10.26)$$

$$\lambda^{(1)} = \frac{A^{(1)}\varphi^{(0)},\varphi^*}{\varphi^{(0)},\varphi^*} * (10.28)$$

$$f_1 = \lambda^{(1)}\varphi^{(0)} - A^{(1)}\varphi^{(0)}. \ (10.29)$$

$$\lambda^{(2)} = \frac{\left(A^{(2)}\varphi^{(0)} + A^{(1)}\varphi^{(1)},\varphi^*\right) - \lambda^{(1)}(\varphi^{(1)},\varphi^*)}{\varphi^{(0)},\varphi^*}. \ (10.30)$$

$$f_2 = \lambda^{(2)}\varphi^{(0)} + \lambda^{(1)}\varphi^{(1)} - A^{(2)}\varphi^{(0)} - A^{(1)}\varphi^{(1)} \ (10.31)$$

$$\left(A - \lambda^{(0)}E\right)\varphi^{(2)} = f_2. \ (10.32)$$

$$(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x)dx, u, v \in H \qquad (10.33)$$

$$A\varphi = -2\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \varphi, \varphi \in D(A), \ (10.34)$$

$$-2\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \varphi = \lambda\varphi, x \in (0,1), \ \varphi(0) = \varphi(1) = 0. \ (10.35)$$

$\lambda_i = 2\pi^2 i^2 + 1,$ (10.36)

$A_\varepsilon = A + \varepsilon A^{(A)},$ (10.37)

где $-1 \le \varepsilon \le 1,$ $A^{(1)}$- линейный оператор вида

$A^{(1)}\varphi = -\frac{d}{dx}p(x)\frac{d\varphi}{dx} + q(x)\varphi(x),\ \varphi \in D(A),$ (10.38)

а функции *p(x), q(x)* пусть заданы в виде

$$p(x) = 1 + sin\pi x, \qquad q(x) = -2\pi^2 sin\pi x.$$

$-\frac{d}{dx}\left(2 + \varepsilon p(x)\right)\frac{d\varphi_\varepsilon}{dx} + \left(1 + \varepsilon q(x)\right)\varphi_\varepsilon(x) = \lambda u,$ (10.39)

$$x \in (0,1), \varphi_\varepsilon(0) = \varphi_\varepsilon(1) = 0.$$

$$\lambda^{(0)} = 2\pi^2 + 1, \quad \varphi^{(0)} = \varphi^* = \sqrt{2} sin\pi x. \, (10.40)$$

$\lambda^{(1)} = \left(A^{(1)}\varphi^{(0)}, \varphi^*\right) = \int_0^1 p(x) \left(\frac{d\varphi^{(0)}}{dx}\right)^2 dx + \int_0^1 q(x)\left(\varphi^{(0)}\right)^2 dx = 2\pi^2 \int_0^1 (1 +$

$$\lambda_\varepsilon \approx \lambda^{(0)} + \varepsilon\lambda^{(1)} + \varepsilon\lambda^{(2)}$$
$$= 2\pi^2 + 1 + \varepsilon(\pi^2 - 4\pi) - \varepsilon^2(\pi^2 + 8). \quad (10.45)$$

Далее, зная $\lambda^{(2)}$, мы можем вычислить f_2 по формуле (10.31), решить задачу (10.32) и найти $\varphi^{(2)}$ затем $\lambda^{(3)}$ и т.д.

Таким образом, описанный алгоритм возмущений позволяет найти возмущенное собственное значение $\lambda_\varepsilon = \lambda_\varepsilon^{(1)}$ с любой наперед заданной точностью по ε. Аналогичным образом можно вычислить любое собственное значение $\lambda_\varepsilon^{(k)} (k = 2,3,..)$задачи (10.39).

Список литературы:

1.Марчук Г.И. Сопряженные уравнения: Курс лекций.-М.:ИВМ РАН, 2000. – 175 с.